

e-ISSN: 2964-0849
Vol.5 No.1 November 2026
DOI :https://doi.org/10.59585/bajik

Barongko
Jurnal Ilmu Kesehatan

Analisis Analitik–Komputasional Gerak Parabola: Penurunan Berbasis Kalkulus, Sudut Jangkauan Optimal, dan Validasi Simulasi PhET

Analytical–Computational Analysis of Projectile Motion: Calculus-Based Derivation, Optimal Launch Angle, and PhET Simulation Validation

Zalfa Puteri Mardjova*, Satria El Maula Siregar, Sovian Aritonang
*Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Pertahanan Republik Indonesia

z.puterimardjova@gmail.com*, semsrg05@gmail.com, sovian.aritonang@idu.ac.id

Abstract

This study derives the equations of projectile motion analytically using calculus, proves the optimal launch angle mathematically, and validates the results with the PhET Projectile Motion simulation. Position equations are obtained by integrating constant acceleration, and the optimal angle is proved with the first and second derivatives of the range function. The simulation uses an initial speed of 10 m/s, launch angles from 25° to 90° in 5° steps, several initial speeds, and initial heights of 0, 2, 5, and 10 m, without air resistance. Simulated values are compared with theory using relative error and RMSE. Theory predicts a maximum range at 45° for ground-level launches and a smaller optimal angle for elevated launches. Simulated values agree with theory, with a mean relative error of 0.57% and an RMSE of 0.04 m for the angle variation, and a mean relative error of 0.42% and an RMSE of 0.06 m for the initial-height variation. The simulated optimal angle at h = 10 m is 30°, matching the theoretical value. The study shows that PhET can quantitatively validate the analytic derivation of projectile motion.

Keywords: *Projectile Motion, Calculus, Optimal Angle, PhET Simulation, Relative Error*

Abstrak

Penelitian ini menurunkan persamaan gerak parabola secara analitik dengan kalkulus, membuktikan sudut jangkauan optimal secara matematis, lalu memvalidasinya dengan simulasi PhET Projectile Motion. Persamaan posisi diperoleh dengan mengintegralkan percepatan konstan, dan sudut optimal dibuktikan melalui turunan pertama dan kedua fungsi jangkauan. Simulasi dilakukan pada kecepatan awal 10 m/s dengan sudut 25° sampai 90° (kelipatan 5°), variasi kecepatan awal, dan variasi ketinggian awal 0, 2, 5, dan 10 m, tanpa hambatan udara. Hasil simulasi dibandingkan dengan nilai teori melalui galat relatif dan RMSE. Teori menunjukkan jangkauan maksimum di sudut 45° untuk peluncuran dari tanah dan sudut optimal yang lebih kecil dari 45° untuk peluncuran dari ketinggian tertentu. Hasil simulasi sesuai dengan teori, dengan galat relatif rata-rata 0,57% dan RMSE 0,04 m pada variasi sudut, serta galat relatif rata-rata 0,42% dan RMSE 0,06 m pada variasi ketinggian awal. Sudut optimal hasil simulasi pada h = 10 m adalah 30°, sama dengan nilai teori. Penelitian ini menunjukkan bahwa simulasi PhET dapat memvalidasi penurunan analitik gerak parabola secara kuantitatif.

Kata Kunci: Gerak Parabola, Kalkulus, Sudut Optimal, Simulasi PhET, Galat Relatif

Penulis Korespondensi : Zalfa Puteri Mardjova

Author@ This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/

e-ISSN: 2964-0849
Vol.5 No.1 November 2026
DOI :https://doi.org/10.59585/bajik

Barongko
Jurnal Ilmu Kesehatan

I. PENDAHULUAN

Gerak parabola adalah contoh paling jelas bagaimana kalkulus menggambarkan gerak: kecepatan adalah turunan posisi, percepatan adalah turunan kecepatan, dan sebaliknya posisi diperoleh dari integral percepatan. Meski begitu, kajian berbasis simulasi sering berfokus pada pengamatan data, sehingga penurunan matematis persamaannya kurang mendapat tempat (Yanto et al., 2025). Anggapan bahwa sudut 45° selalu memberi jangkauan terjauh telah dikaji sebagai miskonsepsi (Purnama et al., 2024), padahal hasil itu hanya berlaku bila benda diluncurkan dan mendarat pada ketinggian yang sama.

Simulasi virtual seperti PhET dipakai untuk mengeksplorasi gerak parabola karena data dapat diperoleh cepat dan berulang tanpa alat laboratorium (Yanto et al., 2025), sedangkan analisis video dengan Tracker dipakai sebagai alternatif praktikum kinematika (Renika et al., 2024). Dataset dan latihan berbasis data eksperimen juga telah dikembangkan untuk membandingkan prediksi persamaan gerak dengan pengukuran pada berbagai sudut dan kecepatan (Wadsworth et al., 2025). Dari sisi matematis, optimasi sudut tembak telah dikaji dengan kalkulus, misalnya untuk panjang lintasan total (Karadag, 2020), dan dengan model yang lebih lengkap seperti hambatan kuadratik (Bradshaw, 2023; Corvo, 2022) serta turunan konformabel (Contreras et al., 2018). Simulasi numerik berbasis Python juga telah dipakai untuk mengoptimalkan sudut peluncuran dengan memperhitungkan gaya hambat udara (Yuliani et al., 2025).

Dalam praktiknya, benda jarang diluncurkan dan mendarat pada ketinggian yang sama, sehingga model dengan ketinggian awal nol hanyalah kasus khusus. Bila ketinggian awal bertambah, waktu terbang menjadi lebih lama dan sudut yang memberi jangkauan terjauh bergeser menjadi lebih kecil dari 45° (lihat Bagian 2.5), sehingga rumus yang dihafal untuk kasus tanah datar tidak lagi dapat dipakai begitu saja. Penurunan analitik memberi kepastian tentang bentuk fungsi jangkauan dan letak titik optimumnya, sedangkan simulasi menyediakan data pada banyak kombinasi parameter dengan cepat. Keduanya saling melengkapi: teori menjelaskan mengapa suatu hasil muncul, dan data simulasi menguji apakah teori itu benar secara kuantitatif (Wadsworth et al., 2025). Pendekatan gabungan ini juga memperlihatkan batas ketelitian simulasi, misalnya akibat resolusi sudut dan pembacaan alat ukur.

Penelitian terdahulu oleh Yanto et al. (2025) memanfaatkan simulasi PhET untuk menelaah pengaruh sudut elevasi terhadap tinggi maksimum, jangkauan, dan waktu ke puncak pada tiga variasi sudut dengan kecepatan awal tetap. Namun, kajian tersebut belum menurunkan persamaan gerak secara analitik, belum membuktikan sudut optimal secara matematis, dan belum membandingkan hasil simulasi dengan nilai teoritis secara kuantitatif melalui galat relatif. Variasi ketinggian awal, yang tersedia di PhET dan mengubah sudut optimal, juga belum ditelaah.

Penelitian ini mengisi celah tersebut dengan tujuan: (1) menurunkan persamaan gerak parabola dengan kalkulus, (2) membuktikan sudut jangkauan optimal untuk peluncuran dari tanah dan dari ketinggian h, dan (3) memvalidasi hasil teori dengan simulasi PhET pada variasi sudut, kecepatan awal, dan ketinggian awal menggunakan galat relatif dan RMSE. Penelitian dibatasi pada gerak tanpa hambatan udara dengan percepatan gravitasi konstan.

Kinematika dengan Kalkulus

Posisi, kecepatan, dan percepatan terhubung lewat turunan dan integral (Young and Freedman, 2020). Untuk gerak dalam bidang x-y, setiap komponen diperlakukan terpisah:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

Bila percepatan diketahui, kecepatan dan posisi diperoleh dengan integrasi, dengan kondisi awal sebagai konstanta integrasi:

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a\ dt', \qquad s(t) = s_0 + \int_0^t v\ dt'$$

Gerak Parabola

Gerak parabola adalah gerak dua dimensi dengan kecepatan awal v_0 yang membentuk sudut θ terhadap horizontal, di bawah percepatan gravitasi konstan g dan tanpa hambatan udara. Komponen horizontal dan vertikal bergerak independen dan hanya berbagi variabel waktu t (Young and Freedman, 2020). Kecepatan awal diuraikan dengan trigonometri

e-ISSN: 2964-0849
Vol.5 No.1 November 2026
DOI :https://doi.org/10.59585/bajik

Barongko
Jurnal Ilmu Kesehatan

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta, \qquad v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

Simulasi PhET Gerak Parabola

PhET Interactive Simulations dari University of Colorado Boulder menyediakan simulasi *Projectile Motion* yang memungkinkan pengguna mengatur sudut, kecepatan awal, ketinggian awal, gravitasi, dan hambatan udara, serta membaca waktu, jangkauan, dan tinggi lintasan (PhET Interactive Simulations, n.d.). Pada penelitian ini simulasi diperlakukan sebagai sumber data pembanding bagi model analitik, bukan sebagai pengganti pengukuran laboratorium.

Galat Relatif dan RMSE

Kesesuaian simulasi dengan teori diukur dengan galat relatif untuk tiap titik dan RMSE untuk seluruh titik:

$$\varepsilon = \frac{|X_{teori} - X_{sim}|}{X_{teori}} \times 100\%, \qquad RMSE = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (X_{sim,i} - X_{teori,i})^2}$$

Penurunan Model Matematis

Persamaan Posisi dan Kecepatan

Benda diluncurkan dari titik (0, h) pada t=0 dengan kecepatan awal v_0 dan sudut θ. Tanpa hambatan udara, $a_x = 0$ dan $a_y = -g$. Integral pertama memberi kecepatan:

$$v_x(t) = v_0 \cos\theta, \qquad v_y(t) = v_0 \sin\theta - g\,t$$

Integral kedua memberi posisi:

$$x(t) = v_0 \cos\theta \;\; t, \qquad y(t) = \mathrm{h} + v_0 \sin\theta \;\; t - \frac{1}{2} g\, t^2$$

Persamaan Lintasan

Dengan $t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$ dari $x(t)$, substitusi ke $y(t)$ menghasilkan fungsi kuadrat dalam x, sehingga lintasannya parabola:

$$y(x) = \mathrm{h} + x\tan\theta - \frac{g\,x^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$$

Waktu Puncak, Tinggi Maksimum, dan Waktu Terbang

Puncak tercapai saat $v_y = 0$:

$$t_p = \frac{v_0 \sin\theta}{g}, \qquad H = \mathrm{h} + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

Benda mendarat saat $y(t) = 0$. Akar positif persamaan kuadrat itu adalah waktu terbang:

$$t_f = \frac{v_0 \sin\theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2g\mathrm{h}}}{g}$$

Jangkauan adalah $R = v_0 \cos\theta \cdot t_f$. Untuk h = 0, $t_f = 2\frac{v_0 \sin\theta}{g}$, sehingga dengan identitas $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

Sudut Optimal untuk h = 0

Turunan pertama R terhadap θ disamakan nol:

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{2v_0^2 \cos 2\theta}{g} = 0 \Rightarrow 2\theta = 90^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

Turunan kedua di titik itu negatif, sehingga $\theta = 45^\circ$ adalah maksimum:

e-ISSN: 2964-0849
Vol.5 No.1 November 2026
DOI :https://doi.org/10.59585/bajik

Barongko
Jurnal Ilmu Kesehatan

$$\frac{d^2R}{d\theta^2} = -\frac{4v_0^2 \sin 2\theta}{g}\Big|_{45°} = -\frac{4v_0^2}{g} < 0$$

Karena sin 2θ = sin(180° − 2θ), sudut θ dan (90° − θ) memberi jangkauan sama, misalnya 30° dan 60°. Grafik R terhadap θ simetris terhadap 45°.

Sudut Optimal untuk h > 0

Untuk h > 0 turunan langsung R(θ) rumit, tetapi hasilnya dapat diperoleh dari persamaan lintasan dengan $u = tan\theta$, memakai $\frac{1}{cos^2\theta} = 1+u^2$:

$$F(x,u) = \mathrm{h} + x\,u - \frac{g\,x^2}{2v_0^2}(1 + u^2) = 0$$

Pada jangkauan maksimum $\frac{dx}{du} = 0$, yang berarti $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$:

$$x - \frac{g\,x^2 u}{v_0^2} = 0 \Rightarrow u = \frac{v_0^2}{g\,x}$$

Substitusi u ke $F = 0$ menghasilkan $\mathrm{h} + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} = 0$, sehingga:

$$R_{maks} = \frac{v_0\sqrt{v_0^2+2g\mathrm{h}}}{g}, \qquad \tan\theta_{opt} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+2g\mathrm{h}}}$$

Untuk h = 0 hasil ini kembali ke θ=45° dan $R = \frac{v_0^2}{g}$. Untuk h > 0, pembilang lebih kecil daripada penyebut sehingga $\theta_{opt} < 45°$, dan makin kecil bila h makin besar.

II. METODE

Penelitian ini bersifat analitik-komputasional: nilai teori dihitung dari persamaan pada Bagian 2, kemudian dibandingkan dengan data simulasi PhET Projectile Motion (PhET Interactive Simulations, n.d.). Karena simulasi bersifat deterministik, setiap kondisi dijalankan satu kali dan variasi dilakukan pada parameter masukan, bukan pada pengulangan yang identik.

Alat dan Pengaturan Simulasi. Perangkat: komputer atau laptop dengan peramban web. Perangkat lunak: PhET Projectile Motion, layar *Lab* (diakses : 17 November 2026), https://phet.colorado.edu. Hambatan udara: dimatikan. Percepatan gravitasi: g = 10,00 m/s². Nilai yang sama dipakai pada semua rumus teori. Objek: bola meriam, massa dan diameter bawaan simulasi (17.60 kg dan 0.18 m).

Tabel 1. Variasi Percobaan

Percobaan	Parameter tetap	Parameter divariasikan
A. Variasi sudut	v_0 = 10 m/s, h = 0 m	θ = 25° sampai 90° kelipatan 5° (14 titik)
B. Variasi kecepatan	θ = 45°, h = 0 m	v_0 = 5, 10, 15, 20 m/s
C. Variasi ketinggian awal	v_0 = 10 m/s	h = 0, 2, 5, 10 m; sudut 25° sampai 50° kelipatan 5°

Prosedur: (1) Buka simulasi, pilih layar *Lab*, matikan hambatan udara, dan atur g. (2) Atur ketinggian awal, sudut, dan kecepatan awal sesuai tabel variasi. (3)Tembakkan, lalu baca waktu terbang total, jangkauan, dan tinggi maksimum dari alat ukur lintasan simulasi. Waktu ke puncak dibaca dari titik tertinggi lintasan. (3) Catat hasil pada tabel, lalu hitung nilai teori dari persamaan Bagian 2 dengan g yang sama. (4) Hitung galat relatif untuk tiap titik dan RMSE untuk tiap percobaan. (5) Untuk percobaan C, tentukan sudut optimal simulasi sebagai sudut

e-ISSN: 2964-0849
Vol.5 No.1 November 2026
DOI :https://doi.org/10.59585/bajik

Barongko
Jurnal Ilmu Kesehatan

dengan jangkauan terbesar, lalu bandingkan dengan θ_{opt} dari Bagian 2.5. Resolusi sudut 5° membatasi ketelitian ini, jadi laporkan selisihnya sebagai selisih resolusi, bukan galat model.

Analisis Data, Tiga ukuran dipakai: galat relatif per titik, RMSE untuk jangkauan terhadap sudut (percobaan A), dan selisih sudut optimal simulasi terhadap teori (percobaan C). Perbandingan kurva R terhadap θ ditampilkan dalam satu grafik berisi kurva teori sin 2θ dan titik-titik simulasi.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Hasil

Nilai teori di bawah dihitung dari persamaan Bagian 2 dengan g = 10 m/s². Kolom bertanda (R PhET) diisi dari data PhET, dan galat relatif dihitung dengan rumus Bagian 1.4.

Tabel 2. Nilai Teori dan Hasil Simulasi Untuk Variasi Sudut

θ (°)	t puncak teori (s)	H teori (m)	t terbang teori (s)	R teori (m)	R PhET (m)	Galat R (%)
25	0,423	0,89	0,845	7,66	7,7	0,52
30	0,500	1,25	1,000	8,66	8,6	0,70
35	0,574	1,64	1,147	9,40	9,4	0,03
40	0,643	2,07	1,286	9,85	9,9	0,53
45	0,707	2,50	1,414	10,00	10,0	0,00
50	0,766	2,93	1,532	9,85	9,9	0,53
55	0,819	3,36	1,638	9,40	9,4	0,03
60	0,866	3,75	1,732	8,66	8,7	0,46
65	0,906	4,11	1,813	7,66	7,7	0,52
70	0,940	4,42	1,879	6,43	6,4	0,43
75	0,966	4,67	1,932	5,00	5,0	0,00
80	0,985	4,85	1,970	3,42	3,4	0,59
85	0,996	4,96	1,992	1,74	1,8	3,66
90	1,000	5,00	2,000	0,00	0,0	0,00

Teori memprediksi jangkauan horizontal maksimum tercapai tepat pada sudut elevasi θ = 45° sebesar 10,00 m. Karena peluncuran dilakukan dari tanah (h = 0 m), kurva fungsi jangkauan R(θ) yang sebanding dengan sin 2θ menunjukkan sifat simetri sempurna di sekitar 45°, di mana pasangan sudut komplementer (θ dan 90° - θ) menghasilkan jangkauan yang identik, seperti terlihat pada pasangan 40° dan 50° (9,85 m), 35° dan 55° (9,40 m), 30° dan 60° (8,66 m), serta 25° dan 65° (7,66 m). Hasil simulasi PhET mengonfirmasi prediksi analitik tersebut secara sangat presisi, dengan jangkauan maksimum tercatat tepat pada θ = 45° sebesar 10,0 m. Pada batas sudut θ = 90°, jangkauan horizontal simulasi bernilai 0 m sementara tinggi maksimum mencapai nilai puncaknya (5,00 m), yang secara fisis memvalidasi transisi gerak parabola dua dimensi menjadi gerak vertikal ke atas satu dimensi. Kesesuaian kuantitatif antara teori dan simulasi sangat tinggi, dengan galat relatif rata-rata sebesar 0,57% dan nilai RMSE sebesar 0,04 m. Galat terbesar (3,66%) terjadi pada sudut θ = 85° .

Tabel 3. Pengaruh Kecepatan Awal

v_0 (m/s)	t terbang teori (s)	H teori (m)	R teori (m)	R PhET (m)	Galat R (%)
5	0,707	0,63	2,50	2,5	0,00
10	1,414	2,50	10,00	10,0	0,00
15	2,121	5,63	22,50	22,5	0,00
20	2,828	10,00	40,00	40,0	0,00

e-ISSN: 2964-0849
Vol.5 No.1 November 2026
DOI :https://doi.org/10.59585/bajik

Barongko
Jurnal Ilmu Kesehatan

Karena $R=\frac{v_0^2}{g}$ pada 45°, melipatgandakan v_0 menggandakan waktu terbang dan menaikkan jangkauan empat kali. Data simulasi mengikuti pola kuadrat ini secara sempurna: rasio R terhadap R(v_0 = 5 m/s) berturut-turut 4, 9, dan 16 untuk v_0 = 10, 15, dan 20 m/s, sesuai rasio $(\frac{v_0}{5})^2$ = 4, 9, 16. Galat relatif seluruh titik adalah 0,00%, menunjukkan bahwa simulasi PhET mereproduksi hubungan kuadratik $R \propto v_0^2$ tanpa penyimpangan yang terukur.

Tabel 4. Sudut Optimal dan Jangkauan Maksimum Teori

h (m)	θ_{opt} teori (°)	R maks teori (m)	R pada 45° teori (m)	θ_{opt} PhET (°)	R maks PhET (m)
0	45,00	10,00	10,00	45	10,00
2	40,20	11,83	11,71	40	11,9
5	35,26	14,14	13,66	35	14,1
10	30,00	17,32	16,18	30	17,3

Tabel 5. Jangkauan Teori (m) Pada Sudut Yang Diuji

h (m)	25°	30°	35°	40°	45°	50°
0	7,66	8,66	9,40	9,85	10,00	9,85
2	10,72	11,31	11,69	11,83	11,71	11,31
5	13,67	14,01	14,14	14,03	13,66	13,02
10	17,21	17,32	17,20	16,82	16,18	15,26

Tabel 6. Jangkauan Percobaan PhET (m) Pada Sudut Yang Diuji

h (m)	25°	30°	35°	40°	45°	50°
0	7,6	8,6	9,4	9,8	10,0	9,8
2	10,6	11,2	11,6	11,9	11,6	11,3
5	13,6	14,0	14,1	14,0	13,6	13,0
10	17,2	17,3	17,2	16,8	16,2	15,2

Pada h = 10 m, sudut 30° (17,32 m) mengalahkan 45° (16,18 m). Ini menunjukkan bahwa sudut 45° optimal hanya untuk peluncuran dan pendaratan pada ketinggian yang sama, sejalan dengan topik miskonsepsi yang dibahas oleh Purnama et al. (2024). Karena sudut diuji per 5°, sudut optimal simulasi hanya dapat dibandingkan dengan teori sampai resolusi itu: untuk h = 2 m dan 5 m, nilai terbaik pada kisi (40° dan 35°) berbeda 0,2° dan 0,26° dari teori. Sudut dengan jangkauan terbesar di PhET untuk setiap ketinggian: h = 0 m → 45° (sesuai teori), h = 2 m → 40° (teori 40,20°, selisih 0,20°), h = 5 m → 35° (teori 35,26°, selisih 0,26°), dan h = 10 m → 30° (sesuai teori, selisih 0,00°). Semua sudut optimal simulasi sesuai dengan prediksi teori dalam resolusi kisi 5°. Galat jangkauan maksimum simulasi terhadap teori berkisar 0,00%–0,57%, menunjukkan kesesuaian yang sangat tinggi.

2. Pembahasan

Kesesuaian teori dan simulasi**.** Pada variasi sudut (percobaan A), galat relatif rata-rata simulasi terhadap teori adalah 0,57% dengan RMSE 0,04 m. Pada variasi kecepatan awal (percobaan B) galatnya 0,00% di semua titik, dan pada variasi ketinggian awal (percobaan C, 24 titik pada Tabel 5 dan Tabel 6) galat relatif rata-rata 0,42% dengan RMSE 0,06 m. Galat terbesar percobaan A (3,66%) muncul pada sudut besar, yaitu θ = 85°, bukan pada sudut kecil. Pada sudut itu jangkauan teori hanya 1,74 m, sehingga selisih mutlak yang kecil (0,06 m) menghasilkan galat relatif yang besar; galat relatif memang membesar bila nilai teori mendekati nol. Pada percobaan C galat terbesar (1,16%) terjadi pada h = 2 m dan θ = 25°, dengan galat rata-rata per ketinggian 0,42% (h = 0), 0,84% (h = 2 m), 0,29% (h = 5 m), dan 0,14% (h = 10 m). Hampir semua nilai simulasi sedikit lebih kecil daripada nilai teori, dengan selisih mutlak tidak lebih dari sekitar 0,13 m, yang sejalan dengan keterbatasan pembacaan simulasi pada satu tempat desimal. Karena sudut optimal simulasi tepat sama dengan teori pada semua ketinggian, selisih ini lebih mencerminkan ketelitian pembacaan simulasi daripada kekeliruan model.

e-ISSN: 2964-0849
Vol.5 No.1 November 2026
DOI :https://doi.org/10.59585/bajik

Barongko
Jurnal Ilmu Kesehatan

Peran kalkulus. Integral percepatan menghasilkan x(t) dan y(t), dan turunan R(θ) membuktikan 45° secara pasti, sedangkan simulasi hanya menunjukkannya pada titik-titik yang diuji. Batasan. Model tanpa hambatan udara. Hambatan udara mengubah sudut optimal dan memperpendek jangkauan, dan telah dikaji secara analitik dan numerik (Bradshaw, 2023; Corvo, 2022; Yuliani et al., 2025). Pada PhET, hambatan udara dapat diaktifkan sebagai pengembangan lanjutan. Perbandingan dengan penelitian terdahulu. Dibanding Yanto et al. (2025), penelitian ini menambah penurunan analitik, rentang sudut yang lebih rapat, variasi h, dan ukuran kesesuaian kuantitatif.

IV. KESIMPULAN

Persamaan gerak parabola dapat diturunkan langsung dari integral percepatan konstan, dan lintasannya berbentuk parabola. Untuk peluncuran dari tanah, jangkauan $R = v_0^2 \sin 2\theta / g$ maksimum pada $\theta = 45°$ (turunan pertama nol, turunan kedua negatif). Untuk peluncuran dari ketinggian h, sudut optimal memenuhi $\tan \theta = v_0 / \sqrt{(v_0^2 + 2gh)}$, yang selalu kurang dari 45°. Simulasi PhET sesuai dengan teori dengan galat relatif rata-rata 0,57% dan RMSE 0,04 m pada variasi sudut, serta 0,42% dan 0,06 m pada variasi ketinggian awal. Sudut optimal simulasi pada h = 10 m adalah 30° (teori 30°), dan sudut optimal pada h = 2 m dan 5 m sesuai dengan teori dalam resolusi kisi 5°. Dengan demikian, simulasi PhET dapat memvalidasi penurunan analitik secara kuantitatif, dengan ketelitian yang dibatasi oleh resolusi sudut 5° dan pembacaan alat ukur.

DAFTAR PUSTAKA

Bradshaw, J.L. (2023) 'Projectile motion with quadratic drag', *American Journal of Physics*, 91(7), pp. 546–550. doi: 10.1119/5.0095643.

Contreras, A.O., Rosales García, J.J., Jiménez, L.M. and Cruz-Duarte, J.M. (2018) 'Analysis of projectile motion in view of conformable derivative', *Open Physics*, 16(1), pp. 581–587. doi: 10.1515/phys-2018-0076.

Corvo, A. (2022) 'Subtle features in projectile motion with quadratic drag found through Taylor series expansions', *American Journal of Physics*, 90(2), pp. 135–140. doi: 10.1119/10.0009227.

Karadag, M. (2020) 'A study for determining the launch angle that maximises the total distance travelled by the projectile during its flight in the projectile motion', *Physics Education*, 55(3), 033011.

PhET Interactive Simulations (n.d.) *Projectile Motion*. University of Colorado Boulder. Available at: https://phet.colorado.edu (Accessed: 17 November 2026).

Purnama, R., Andhika, S., Nurul, A.F., Cesariyanti, Y. and Agustina, R.D. (2024) 'Graphical analyzer test of misconception of 45° angle as optimal angle in projectile motion', *Radiasi: Jurnal Berkala Pendidikan Fisika*, 17(2), pp. 114–124. doi: 10.37729/radiasi.v17i2.896.

Renika, J., Prima, E.C. and Amprasto, A. (2024) 'Kinematics analysis on accelerated motion using tracker video analysis for educational purposes', *Momentum: Physics Education Journal*, 8(1), pp. 23–31. doi: 10.21067/mpej.v8i1.8883.

Wadsworth, F.B. et al. (2025) 'Projectile motion: experimental datasets and classroom exercises', *Physics Education*, 60(4), 045024. doi: 10.1088/1361-6552/add2c5.

Yanto, Azmar and Malik (2025) 'Effect of elevation angle on range, maximum height, and travel time in parabolic motion: A PhET simulation approach', *KONSTAN: Jurnal Fisika dan Pendidikan Fisika*, 10(1), pp. 80–90.

Young, H.D., Freedman, R.A., and Ford, A.L. (2020) *University Physics with Modern Physics*. 15th edn. Pearson Education.

Yuliani, R., Saifullah, K., Purnomo, A.D., Jehadu, V. and Sholihun, S. (2025) 'Simulasi numerik tumbukan dua proyektil di udara', *Journal Online of Physics*, 10(3). doi: 10.22437/jop.v10i3.45624.