e-ISSN: 2964-0849
Vol.5 No.1 November 2026
DOI :https://doi.org/10.59585/bajik

Barongko
Jurnal Ilmu Kesehatan

Analisis Matematis Multiskala Kinerja Anti-Penetrasi Material Logam: Batas Balistik, Ketidakstabilan Geser Adiabatik, Dan Kinetika Rekristalisasi Dinamis

Multiscale Mathematical Analysis Of The Anti-Penetration Performance Of Metallic Materials: Ballistic Limit, Adiabatic Shear Instability, And Dynamic Recrystallization Kinetics

Azalia Sabila*, Sovian Aritonang
*Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Militer, Universitas Pertahanan Republik Indonesia

azaliasabila1607@gmail.com* , sovian.aritonang@idu.ac.id

Abstract

The resistance of metals to penetration is governed by processes at several scales: the ballistic limit velocity (macroscale), adiabatic shear band (ASB) formation (mesoscale), and dynamic recrystallization (microscale). A recent review described these links qualitatively but gave no mathematical treatment connecting them. This study develops the mathematics of the models compiled in that review. The Recht–Ipson model is re-derived from energy and momentum conservation and proved to be strictly increasing and concave, with an unbounded derivative at the ballistic limit; a linear estimator of the ballistic limit is built and tested by Monte Carlo simulation. Coupling the Johnson–Cook model with the adiabatic temperature-rise equation gives, for linear thermal softening, an analytical solution and a critical-strain criterion with a unique root for $0 < n < 1$. Reported grain-boundary migration rates fitted with an Arrhenius model yield an activation energy of 139.5 kJ/mol ($R^2 = 0.99999$), from which the migration distance during cooling is approximated asymptotically. Migration can form 20 nm nanograins only at peak temperatures of about 1,420–1,940 K, well above the critical ASB temperatures of 410–770 K, indicating that equiaxed nanograins in ASBs form by rotation rather than migration.

Keywords: *Ballistic Limit, Recht–Ipson Model, Johnson–Cook Model, Adiabatic Shear Band, Dynamic Recrystallization*

Abstrak

Kemampuan logam menahan penetrasi dipengaruhi proses pada beberapa skala: kecepatan batas balistik (makro), pembentukan pita geser adiabatik atau *adiabatic shear band* (ASB) (meso), dan rekristalisasi dinamis (mikro). Sebuah ulasan terbaru telah menguraikan keterkaitan ketiga skala ini secara kualitatif, tetapi belum menyajikan kajian matematis yang mengaitkannya. Penelitian ini mengembangkan sisi matematis model-model yang dirangkum dalam ulasan tersebut tanpa data eksperimen baru. Model Recht–Ipson diturunkan kembali dari prinsip kekekalan energi dan momentum, lalu dibuktikan monoton naik dan cekung, memiliki turunan tak terbatas di titik batas balistik, dan memiliki asimtot miring; disusun pula penaksir linier kecepatan batas balistik yang diuji melalui simulasi Monte Carlo. Selanjutnya, model konstitutif Johnson–Cook dipadukan dengan persamaan kenaikan suhu adiabatik sehingga, untuk pelunakan termal linier, diperoleh solusi analitik dan kriteria regangan kritis yang terbukti berakar tunggal bila $0 < n < 1$. Terakhir, data laju migrasi batas butir diolah dengan model Arrhenius dan menghasilkan energi aktivasi 139,5 kJ/mol ($R^2 = 0{,}99999$), yang dipakai untuk menurunkan pendekatan asimtotik jarak migrasi selama pendinginan. Nanobutir 20 nm hanya dapat terbentuk lewat migrasi pada suhu puncak 1.420–1.940 K, jauh di atas suhu kritis ASB dari model meso (410–770 K). Hasil ini menjadi bukti kuantitatif bahwa nanobutir equiaxed di dalam ASB terbentuk melalui mekanisme rotasi, bukan migrasi.

Kata Kunci: Batas Balistik, Model Recht–Ipson, Model Johnson–Cook, Pita Geser Adiabatik, Rekristalisasi Dinamis

Author@ This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/

e-ISSN: 2964-0849
Vol.5 No.1 November 2026
DOI :https://doi.org/10.59585/bajik

Barongko
Jurnal Ilmu Kesehatan

Penulis Korespondensi : Azalia Sabila

I. PENDAHULUAN

Untuk melindungi struktur dari tumbukan dan penetrasi berkecepatan tinggi, logam hingga kini tetap menjadi material yang paling banyak dipilih. Logam unggul karena memadukan kekuatan, keuletan, dan daya serap energi yang baik. Kebutuhan akan material semacam ini tidak hanya datang dari sektor pertahanan, tetapi juga dari industri nuklir, otomotif, dan kedirgantaraan (Chen et al., 2024). Ulasan menyeluruh mengenai mekanisme ketahanan penetrasi logam telah dipublikasikan oleh Chen et al. (2024). Ulasan tersebut membahas berbagai aspek: mode kegagalan pada skala makro, sifat ASB yang mula-mula dilaporkan oleh Zener and Hollomon (1944), mekanisme penguatan mikrostruktur, serta model konstitutif dan simulasi numerik.

Salah satu kesimpulan ulasan itu adalah bahwa keterkaitan antara mode kegagalan makro dan mekanisme mikro baru dipahami secara kualitatif. Rumusan kuantitatif dan hubungan eksplisit di antara keduanya masih jarang tersedia (Chen et al., 2024). Model-model di dalamnya, yaitu model Recht–Ipson (Recht and Ipson, 1963), persamaan kenaikan suhu adiabatik, model Johnson–Cook (Johnson and Cook, 1983), dan persamaan laju migrasi batas butir, dibahas sendiri-sendiri pada skalanya masing-masing. Analisis matematis yang menautkan model-model tersebut belum pernah dilakukan.

Makalah ini berupaya menutup kekurangan tersebut melalui pengembangan matematis, tanpa memerlukan data eksperimen tambahan. Ada empat sumbangan yang diberikan. Pertama, model Recht–Ipson diturunkan kembali dan sifat-sifat analitiknya dibuktikan, termasuk kepekaannya yang sangat tinggi di dekat batas balistik; dirumuskan pula penaksir linier kecepatan batas balistik lengkap dengan galatnya. Kedua, perpaduan model Johnson–Cook dengan persamaan pemanasan adiabatik menghasilkan solusi analitik dan kriteria regangan kritis ketidakstabilan geser, yang eksistensi dan ketunggalannya dibuktikan. Ketiga, data laju migrasi batas butir dari Chen et al. (2024) diolah dengan model Arrhenius untuk memperoleh energi aktivasi, lalu dirumuskan pendekatan asimtotik jarak migrasi selama pendinginan. Keempat, ketiga hasil tersebut dipadukan untuk menguji secara kuantitatif kesimpulan kualitatif Chen et al. (2024) tentang asal-usul nanobutir di dalam ASB.

II. METODE

Kajian ini bersifat teoretis dan analitis, dengan pemeriksaan numerik sebagai pelengkap. Seluruh model dan data bersumber dari Chen et al. (2024). Data yang dimaksud adalah laju migrasi batas butir pada tiga suhu, lama pendinginan sesudah geser adiabatik ($t_c \approx 10^{-3}$ s), serta kisaran ukuran nanobutir dalam ASB (20–200 nm). Nilai parameter Johnson–Cook untuk tiga material uji diambil langsung dari publikasi aslinya (Johnson and Cook, 1983; Lesuer, 2000) karena ulasan Chen et al. (2024) tidak mencantumkannya. Komputasi dikerjakan dengan Python (NumPy dan SciPy). Persamaan diferensial biasa diselesaikan memakai metode Runge–Kutta orde 5(4) pada toleransi relatif 10^{-9}, sedangkan akar persamaan nonlinier dicari dengan metode Brent.

Bentuk model Recht–Ipson yang dipakai oleh Chen et al. (2024, Pers. 1) adalah

$$v_r = a\left(v_i^p - v_{bl}^p\right)^{1/p}, \qquad v_i \geq v_{bl}, \qquad (1)$$

sedangkan $v_r = 0$ bila $v_i < v_{bl}$. Lambang v_i menyatakan kecepatan awal proyektil, v_r kecepatan sisa, v_{bl} kecepatan batas balistik, sementara a dan p adalah konstanta model.

Penurunan untuk $p = 2$. Perforasi dianggap terjadi dalam dua tahap. Di tahap pertama, proyektil bermassa m_p mengeluarkan kerja geser W terhadap target, sehingga kecepatannya berkurang menjadi u:

e-ISSN: 2964-0849
Vol.5 No.1 November 2026
DOI :https://doi.org/10.59585/bajik

Barongko
Jurnal Ilmu Kesehatan

$$1/2\, m_p u^2 = 1/2\, m_p v_i^2 - W. \qquad (2)$$

Di tahap kedua, sumbat (*plug*) bermassa m_{pl} terlepas dari target dan ikut bergerak bersama proyektil sebagai tumbukan tak lenting sempurna, sehingga $m_p u = \left(m_p + m_{pl}\right) v_r$. Batas balistik ialah kecepatan awal yang membuat $u = 0$, yakni $W = 1/2\, m_p v_{bl}^2$. Definisi ini sejalan dengan Pers. (3) pada Chen et al. (2024), $v_{bl} = \sqrt{2W_e/m_p}$. Dengan substitusi, diperoleh

$$v_r = \frac{m_p}{m_p + m_{pl}} \sqrt{v_i^2 - v_{bl}^2}, \qquad (3)$$

yang tidak lain adalah Pers. (1) dengan $a = m_p/\left(m_p + m_{pl}\right) < 1$ dan $p = 2$. Dari penurunan ini, kedua parameter model memperoleh arti fisis. Perhitungan selanjutnya memakai $a = 0{,}9$ dan $v_{bl} = 400$ m/s, yang masih termasuk dalam kisaran kecepatan uji pada Tabel 2 dalam Chen et al. (2024).

Penaksir linier. Jika p dianggap tetap dan dimisalkan $X = v_i^{\,p}$ serta $Y = v_r^{\,p}$, maka Pers. (1) berubah menjadi persamaan garis lurus

$$Y = \beta_1 X + \beta_0, \qquad \beta_1 = a^p, \quad \beta_0 = -a^p v_{bl}^p. \qquad (4)$$

Taksiran kuadrat terkecil $\hat{\beta}_0$ dan $\hat{\beta}_1$ kemudian memberikan

$$\hat{a} = \hat{\beta}_1^{\,1/p}, \qquad \hat{v}_{bl} = \left(-\hat{\beta}_0/\hat{\beta}_1\right)^{1/p}. \qquad (5)$$

Ragam taksiran dihampiri dengan metode delta. Dengan $\theta = v_{bl}^p = -\beta_0/\beta_1$, diperoleh

$$\mathrm{Var}(\hat{v}_{bl}) \approx \left(\frac{\theta^{1/p-1}}{p}\right)^2 \frac{\mathrm{Var}\left(\hat{\beta}_0\right) + \theta^2 \mathrm{Var}\left(\hat{\beta}_1\right) + 2\theta \mathrm{Cov}\left(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1\right)}{\beta_1^2}. \qquad (6)$$

Penaksir (5) lalu dibandingkan dengan regresi nonlinier yang menaksir tiga parameter (a, p, v_{bl}) sekaligus, menggunakan 5.000 kali pengulangan Monte Carlo. Tiap pengulangan berisi delapan tembakan sintetis dengan $v_i \in [420{,}700]$ m/s, dan v_r diberi galat normal berukuran $\sigma \in \{5{,}10{,}20\}$ m/s. Data sintetis ini semata-mata untuk menguji metode dan tidak dimaksudkan sebagai pengganti data eksperimen.

Model konstitutif Johnson–Cook (Johnson and Cook, 1983; Chen et al., 2024, Pers. 21) berbentuk

$$\sigma = (A + B\varepsilon^n)(1 + C\ln\dot{\varepsilon}^*)(1 - T^{*m}), \qquad T^* = \frac{T - T_r}{T_m - T_r}. \qquad (7)$$

Adapun persamaan kenaikan suhu adiabatik (Chen et al., 2024, Pers. 4–5) dinyatakan dalam bentuk diferensialnya:

$$\rho\, c\, \frac{dT}{d\varepsilon} = \beta\, \sigma, \qquad (8)$$

di mana ρ adalah massa jenis, c kalor jenis, dan β koefisien Taylor–Quinney, yakni bagian kerja plastis yang berubah menjadi panas (Taylor and Quinney, 1934). Selanjutnya didefinisikan

$$g = 1 + C\ln\dot{\varepsilon}^*, \quad h(\varepsilon) = A + B\varepsilon^n, \quad \Theta = 1 - T^*, \quad k = \frac{\beta g}{\rho c\,(T_m - T_r)}. \qquad (9)$$

Laju regangan diasumsikan tidak berubah selama pembebanan, dan suhu mula-mula diambil $T_0 = T_r = 293$ K. Awal pelokalan geser ditandai oleh tercapainya tegangan maksimum, $d\sigma/d\varepsilon = 0$ (Recht, 1964; Bai and Dodd, 1992). Karena kondisi ini baru merupakan syarat perlu terjadinya ketidakstabilan, nilai ε_c yang dihasilkan

e-ISSN: 2964-0849
Vol.5 No.1 November 2026
DOI :https://doi.org/10.59585/bajik

Barongko
Jurnal Ilmu Kesehatan

perlu dibaca sebagai batas bawah regangan terbentuknya ASB. Tabel 1 memuat parameter material, dengan $\beta = 0{,}9$ dan $\dot{\varepsilon}_0 = 1\ \mathrm{s}^{-1}$.

Tabel 1. Parameter Johnson–Cook dan sifat termal material uji (Johnson and Cook, 1983; Lesuer, 2000)

Material	A (MPa)	B (MPa)	n	C	m	T_m (K)	ρ (kg/m³)	c (J/kg·K)
OFHC Cu	90	292	0,31	0,025	1,09	1.356	8.960	383
Baja 4340	792	510	0,26	0,014	1,03	1.793	7.830	477
Ti-6Al-4V	1.098	1.092	0,93	0,014	1,10	1.878	4.430	560

Dalam Chen et al. (2024, Pers. 6), laju migrasi batas butir dirumuskan sebagai $v = M_{GB}(\gamma_{GB}/R_{GB})^m$, dan M_{GB} diperlakukan sebagai konstanta. Akan tetapi, angka-angka yang dilaporkan oleh Chen et al. (2024) memperlihatkan bahwa v berubah tajam menurut suhu, yaitu 22, 141, dan 652 nm/s berturut-turut pada 900, 1.000, dan 1.100 K. Penelitian terdahulu pun mendapati bahwa kinetika rekristalisasi dalam ASB sangat ditentukan oleh suhu (Hines and Vecchio, 1997). Atas dasar itu, mobilitas di sini dianggap sebagai proses yang diaktivasi secara termal, $M_{GB} = M_0 \exp(-Q/RT)$. Bila γ_{GB} dan R_{GB} tidak berubah, maka

$$\ln v = \ln v_0 - \frac{Q}{R}\cdot\frac{1}{T}, \qquad (10)$$

dengan $R = 8{,}314$ J/(mol·K). Nilai $\ln v_0$ dan Q ditaksir lewat regresi linier antara $\ln v$ dan $1/T$. Untuk memeriksa ketegaran hasil, dicoba pula bentuk $v \propto T^{-1}\exp(-Q'/RT)$, yang berlaku bila mobilitas sebanding dengan $D_{GB}/k_B T$.

Ada dua cara yang dipakai untuk menghitung jarak migrasi selama pendinginan. Cara pertama memakai batas atas isotermal $x \le v(T_p)\, t_c$, dengan T_p sebagai suhu puncak. Cara kedua memakai pendinginan eksponensial

$$T(t) = T_0 + (T_p - T_0)\, e^{-t/\tau}, \qquad x = \int_0^{\infty} v\big(T(t)\big)\, dt, \qquad (11)$$

dengan $T_0 = 300$ K dan $\tau = t_c/3$. Pada pilihan ini, kira-kira 95% penurunan suhu telah berlangsung dalam waktu $t_c = 1$ ms.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Hasil

Sifat Analitik Model Recht–Ipson

Proposisi 1. Ambil $a > 0$ dan $p > 1$. Untuk $v_i > v_{bl}$, fungsi $v_r(v_i)$ pada Pers. (1) memiliki sifat berikut:

(a) $\dfrac{dv_r}{dv_i} = a^p \left(\dfrac{v_i}{v_r}\right)^{p-1} > a$; akibatnya v_r naik tegas dan $\lim_{v_i \to v_{bl}^+} dv_r/dv_i = \infty$;

(b) $\dfrac{d^2 v_r}{dv_i^2} = -a\,(p-1)\, v_{bl}^{\,p}\, v_i^{\,p-2}\,(v_i^{\,p} - v_{bl}^{\,p})^{1/p-2} < 0$; akibatnya v_r cekung;

(c) bila $v_i \to \infty$, berlaku $v_r = a v_i - \dfrac{a\, v_{bl}^{\,p}}{p\, v_i^{\,p-1}} + O\big(v_i^{\,1-2p}\big)$; akibatnya garis $v_r = a v_i$ menjadi asimtot miring.

Bukti. Tulis $s = v_i^{\,p} - v_{bl}^{\,p} > 0$. (a) Turunan pertama sama dengan $a v_i^{\,p-1} s^{1/p-1}$. Mengingat $s^{1/p} = v_r/a$, ekspresi ini dapat ditulis ulang menjadi $a^p (v_i/v_r)^{p-1}$. Oleh karena $v_r < a v_i$, maka $v_i/v_r > 1/a$,

e-ISSN: 2964-0849
Vol.5 No.1 November 2026
DOI :https://doi.org/10.59585/bajik

Barongko
Jurnal Ilmu Kesehatan

sehingga turunan tersebut melebihi $a^p \cdot a^{1-p} = a$. Saat $v_i \to v_{bl}^+$, nilai $s \to 0$ dan $s^{1/p-1} \to \infty$ karena pangkat $1/p - 1$ negatif. (b) Menurunkan $s^{1/p}$ dua kali terhadap v_i menghasilkan $(p-1)v_i^{p-2}s^{1/p-2}[s - v_i^p] = -(p-1)\, v_{bl}^p\, v_i^{p-2}\, s^{1/p-2}$, dan nilai ini selalu negatif. (c) Tuliskan $v_r = a v_i(1-u)^{1/p}$ dengan $u = (v_{bl}/v_i)^p \to 0$, kemudian gunakan ekspansi $(1-u)^{1/p} = 1 - u/p + O(u^2)$. ■

Sifat (a) memberikan alasan matematis atas sulitnya mengukur batas balistik secara tepat. Di dekat v_{bl}, sedikit saja perubahan pada v_i akan menimbulkan perubahan besar pada v_r. Sebagai contoh, dengan $a = 0{,}9$, $p = 2$, dan $v_{bl} = 400$ m/s, kemiringan kurva mencapai 12,75 pada $v_i = 401$ m/s dan 4,10 pada $v_i = 410$ m/s. Pada $v_i = 800$ m/s kemiringannya tinggal 1,04, sudah dekat dengan $a = 0{,}9$ (Gambar 1a).

Akibat 1 (fraksi energi terdisipasi). Bagian energi kinetik proyektil yang tidak lagi dibawa proyektil sesudah perforasi dinyatakan oleh

$$\eta_E = 1 - \left(\frac{v_r}{v_i}\right)^2 = 1 - a^2\left[1 - \left(\frac{v_{bl}}{v_i}\right)^p\right]^{2/p}. \qquad (12)$$

Nilai fungsi ini berkurang secara monoton, dari 1 ketika $v_i = v_{bl}$ hingga mendekati $1 - a^2$ ketika $v_i \to \infty$. Untuk $a = 0{,}9$ dan $p = 2$, diperoleh η_E sebesar 0,83; 0,71; 0,55; 0,39; dan 0,32 pada v_i = 450, 500, 600, 800, dan 1.000 m/s, dengan nilai limit 0,19 (Gambar 1b). Artinya, target menyerap energi paling efisien ketika kecepatan proyektil berada di sekitar batas balistik. Temuan ini cocok dengan catatan Chen et al. (2024) bahwa untuk plat tipis, kecepatan sisa merupakan ukuran ketahanan penetrasi yang lebih tepat dibanding kedalaman penetrasi.

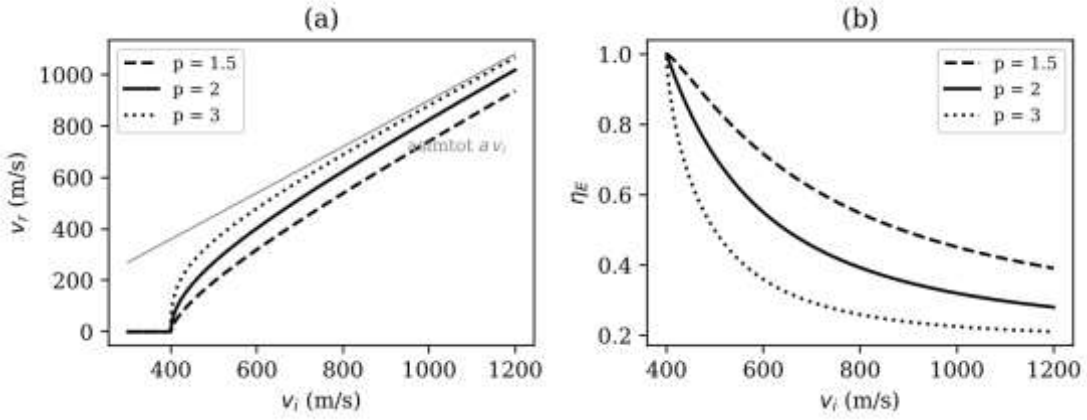
Akibat 2 (sensitivitas penaksir titik tunggal). Apabila a dan p sudah diketahui, cukup satu pasang data (v_i, v_r) untuk menentukan $v_{bl}^p = v_i^p - (v_r/a)^p$. Turunan parsialnya adalah

$$\frac{\partial v_{bl}}{\partial v_r} = -\frac{1}{a}\left(\frac{v_r}{a\, v_{bl}}\right)^{p-1}. \qquad (13)$$

Besarnya turunan ini makin kecil saat $v_r \to 0$. Dengan kata lain, galat pada pengukuran v_r paling sedikit memengaruhi taksiran v_{bl} bila tembakan dilakukan di dekat batas balistik. Sifat ini berlawanan arah dengan Proposisi 1(a). Bila keduanya dibaca bersama, tampak alasan mengapa rancangan uji yang baik menempatkan sebagian besar tembakan di sekitar v_{bl}, namun tetap menyisakan beberapa tembakan pada kecepatan yang jauh lebih tinggi untuk menentukan a.

e-ISSN: 2964-0849
Vol.5 No.1 November 2026
DOI :https://doi.org/10.59585/bajik

Barongko
Jurnal Ilmu Kesehatan



Gambar 1. (a) Kurva Recht–Ipson untuk a = 0,9 dan v_{bl} = 400 m/s pada tiga nilai p, disertai asimtot a·v_i. (b) Fraksi energi terdisipasi η_E (Pers. 12).

Kinerja penaksir. Hasil uji Monte Carlo dirangkum pada Tabel 2. Penaksir linier dengan $p = 2$ menghasilkan RMSE 35–51% lebih rendah dibandingkan regresi nonlinier tiga parameter, dan biasnya nyaris nol. Sebaliknya, regresi nonlinier memberikan taksiran yang cenderung terlalu rendah, dan bias ini bertambah besar ketika galat ukur meningkat. Penyebabnya adalah korelasi yang kuat antara p dan v_{bl} apabila jumlah data terbatas. Oleh sebab itu, selama penetapan $p = 2$ dapat dibenarkan secara fisis (Pers. 3), penaksir (5) lebih layak digunakan.

Tabel 2. Kinerja penaksir v_{bl} (nilai sebenarnya 400 m/s; 5.000 pengulangan; 8 tembakan sintetis)

σ (m/s)	Metode	Bias (m/s)	Simpangan baku (m/s)	RMSE (m/s)
5	Nonlinier (a, p, v_{bl})	−0,35	4,02	4,03
5	Linier, $p = 2$	−0,05	2,64	2,64
10	Nonlinier (a, p, v_{bl})	−1,55	8,98	9,11
10	Linier, $p = 2$	−0,25	5,29	5,29
20	Nonlinier (a, p, v_{bl})	−5,80	21,01	21,79
20	Linier, $p = 2$	−1,23	10,58	10,65

Solusi Tertutup dan Kriteria Ketidakstabilan Geser Adiabatik

Jika Pers. (7) disubstitusikan ke Pers. (8) dan notasi (9) digunakan, diperoleh persamaan diferensial biasa berikut:

$$\frac{d\Theta}{d\varepsilon} = -k\,h(\varepsilon)\left[1 - (1-\Theta)^m\right]. \qquad (14)$$

Pada pelunakan termal linier ($m = 1$), ruas kanan menyederhana menjadi $-k\,h(\varepsilon)\,\Theta$, sehingga variabelnya dapat dipisahkan. Penyelesaiannya adalah

$$\Theta(\varepsilon) = \Theta_0 \exp[-k\,F(\varepsilon)], \qquad F(\varepsilon) = A\varepsilon + \frac{B\,\varepsilon^{n+1}}{n+1}, \qquad (15)$$

e-ISSN: 2964-0849
Vol.5 No.1 November 2026
DOI :https://doi.org/10.59585/bajik

Barongko
Jurnal Ilmu Kesehatan

$$\sigma(\varepsilon) = g\,h(\varepsilon)\,\Theta_0 \exp[-k\,F(\varepsilon)], \qquad T(\varepsilon) = T_m - (T_m - T_0)\exp[-k\,F(\varepsilon)]. \qquad (16)$$

Teorema 1. Ambil $m = 1$, $A \geq 0$, $B > 0$, $0 < n < 1$, dan $k > 0$. Ada satu dan hanya satu regangan kritis $\varepsilon_c \in (0, \infty)$ yang memenuhi

$$n\,B\,\varepsilon_c^{n-1} = k(A + B\varepsilon_c^n)^2. \qquad (17)$$

Selain itu, $\sigma(\varepsilon)$ naik tegas pada selang $(0, \varepsilon_c)$ dan turun tegas pada selang (ε_c, ∞), sehingga tegangan mencapai maksimum globalnya di ε_c.

Bukti. Berdasarkan Pers. (16), $d\sigma/d\varepsilon = g\,\Theta(\varepsilon)[h'(\varepsilon) - k\,h(\varepsilon)^2]$ dengan $g\Theta > 0$. Misalkan $\varphi(\varepsilon) = h'(\varepsilon)/h(\varepsilon)^2 = nB\varepsilon^{n-1}/(A + B\varepsilon^n)^2$. Bila $0 < n < 1$, pembilangnya turun tegas sedangkan penyebutnya tidak pernah turun, sehingga φ kontinu dan turun tegas pada $(0, \infty)$. Lebih lanjut, $\varphi(\varepsilon) \to \infty$ ketika $\varepsilon \to 0^+$ karena $\varepsilon^{n-1} \to \infty$, dan $\varphi(\varepsilon) \to 0$ ketika $\varepsilon \to \infty$. Teorema nilai antara menjamin adanya tepat satu ε_c yang memenuhi $\varphi(\varepsilon_c) = k$. Tanda $d\sigma/d\varepsilon$ mengikuti tanda $\varphi - k$: positif sebelum ε_c dan negatif sesudahnya. ■

Akibat 3. (a) Bila $A = 0$, solusi Pers. (17) dapat ditulis secara eksplisit sebagai $\varepsilon_c = [n/(kB)]^{1/(n+1)}$. (b) Pada $m = 1$, nilai ε_c tidak dipengaruhi suhu awal T_0, sebab Θ_0 hanya berperan sebagai faktor pengali. (c) Elastisitas regangan kritis terhadap k ialah

$$\frac{d\ln\varepsilon_c}{d\ln k} = -\left[(1-n) + \frac{2nB\varepsilon_c^n}{A + B\varepsilon_c^n}\right]^{-1} \in \left[-\frac{1}{1-n}, -\frac{1}{1+n}\right]. \qquad (18)$$

Dengan demikian, $d\ln\varepsilon_c/d\ln\dot{\varepsilon} = (C/g)\,d\ln\varepsilon_c/d\ln k$. (d) Kerja plastis yang diperlukan hingga ketidakstabilan adalah $W_c = \rho c\,(T_c - T_0)/\beta$.

Bukti (c). Logaritmakan kedua ruas Pers. (17) sehingga diperoleh $\ln(nB) + (n-1)\ln\varepsilon_c = \ln k + 2\ln h(\varepsilon_c)$. Turunkan terhadap $\ln k$ dan manfaatkan $d\ln h/d\ln\varepsilon = nB\varepsilon^n/h$. Batas selangnya mengikuti dari $0 \leq B\varepsilon^n/h \leq 1$. ■

Akibat 3(c) dapat dimaknai secara langsung. Mengingat k berbanding terbalik terhadap $\rho c\,(T_m - T_r)$, material yang kapasitas panas volumetrik dan titik lelehnya tinggi akan memiliki ε_c yang lebih besar. Pada material seperti itu, ASB baru muncul pada regangan yang lebih tinggi. Hasil ini memberi landasan kuantitatif bagi anjuran Chen et al. (2024) untuk memperbaiki sifat termal material agar pembentukan ASB dapat ditekan.

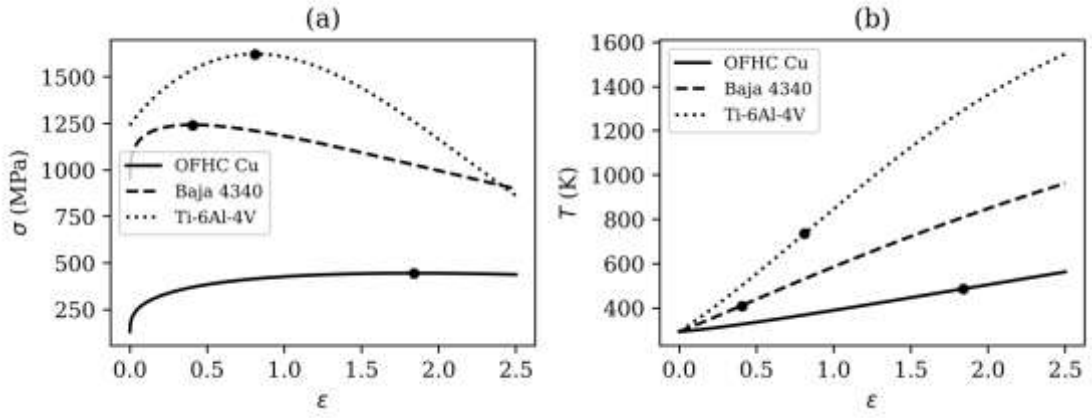
Tabel 3. Regangan kritis ε_c, suhu kritis T_c, dan tegangan maksimum σ_c. Kolom "tertutup" dihitung dari Pers. (16)–(17) dengan $m = 1$, sedangkan kolom "numerik" diperoleh dengan menyelesaikan Pers. (14) memakai nilai m yang sebenarnya.

Material	$\dot{\varepsilon}$ (s^{-1})	ε_c tertutup	ε_c numerik	T_c tertutup (K)	T_c numerik (K)	σ_c numerik (MPa)
OFHC Cu	10^3	1,914	2,014	486	501	441
OFHC Cu	10^5	1,769	1,862	486	501	475
Baja 4340	10^3	0,418	0,439	411	418	1.218
Baja 4340	10^5	0,392	0,412	410	417	1.284
Ti-6Al-4V	10^3	0,837	0,861	740	766	1.653
Ti-6Al-4V	10^5	0,786	0,811	732	758	1.717

Dari Tabel 3 dan Gambar 2 terlihat bahwa solusi tertutup ($m = 1$) memberikan ε_c yang lebih rendah 2,8–5,0% dan T_c yang lebih rendah 7–26 K dibanding solusi numerik. Selisih ini muncul karena nilai $m > 1$ membuat pelunakan pada suhu rendah lebih lemah daripada pada kasus linier. Karena selisihnya kecil, Pers. (17) cukup andal untuk penafsiran cepat. Regangan kritis terkecil (0,39–0,42) dimiliki baja 4340, akibat

e-ISSN: 2964-0849
Vol.5 No.1 November 2026
DOI :https://doi.org/10.59585/bajik
Barongko
Jurnal Ilmu Kesehatan

eksponen pengerasannya yang rendah ($n = 0{,}26$). Kenaikan suhu terbesar ($\Delta T \approx 440$–470 K) terjadi pada Ti-6Al-4V, karena tegangannya besar sementara ρc-nya kecil. Untuk Ti-6Al-4V, $\varepsilon_c \approx 0{,}81$–$0{,}86$, yang dekat dengan regangan pelokalan 0,83 pada sampel topi α-Ti yang dilaporkan Chen et al. (2024). Namun, karena kedua material tidak sama persis, kecocokan ini hanya bersifat petunjuk. Peningkatan laju regangan dari 10^3 menjadi 10^5 s^{-1} menurunkan ε_c hanya sekitar 6%, selaras dengan elastisitas $d\ln\varepsilon_c / d\ln\dot{\varepsilon} \approx -0{,}014$ dari Pers. (18).



Gambar 2. (a) Kurva tegangan–regangan adiabatik dan (b) suhu sebagai fungsi regangan berdasarkan Pers. (16) pada laju regangan 10^4 s^{-1}. Titik hitam menunjukkan ε_c menurut Pers. (17).

Energi Aktivasi dan Jarak Migrasi Batas Butir

Hasil regresi Pers. (10) pada tiga data dari Chen et al. (2024) adalah

$$Q = 139{,}5 \text{ kJ/mol}, \qquad v_0 = 2{,}73 \text{ m/s}, \qquad R^2 = 0{,}999996. \qquad (19)$$

Jika dihitung dari pasangan titik 900–1.000 K dan 1.000–1.100 K, energi aktivasinya berturut-turut 139,0 dan 140,0 kJ/mol. Perbedaan yang sangat kecil ini menandakan bahwa data tersebut patuh pada hukum Arrhenius (Gambar 3a). Model alternatif yang memuat faktor $1/T$ memberikan $Q' = 147{,}7$ kJ/mol ($R^2 = 0{,}99999$), sehingga nilai Q relatif tidak bergantung pada bentuk model yang dipilih.

Proposisi 2 (pendekatan asimtotik jarak migrasi). Pada pendinginan (11) dan dengan $Q/(RT_p) \gg 1$, berlaku

$$x \approx v(T_p)\, t_{\text{eff}}, \qquad t_{\text{eff}} = \tau \, \frac{R\, T_p^2}{Q\,(T_p - T_0)}. \qquad (20)$$

Bukti. Nilai integran $v(T(t))$ terpusat di sekitar $t = 0$. Ekspansi orde satu dari $1/T(t)$ di dekat $t = 0$ memberikan $1/T(t) \approx 1/T_p + (T_p - T_0)\, t/(\tau T_p^2)$. Akibatnya $v(T(t)) \approx v(T_p)\exp[-Q(T_p - T_0)\, t/(RT_p^2\tau)]$, dan pengintegralan dari 0 hingga ∞ menghasilkan Pers. (20). Langkah ini merupakan penerapan metode Laplace pada integral berpangkat besar. ■

Dengan $\tau = 1/3$ ms dan $T_p = 1.100$ K, diperoleh $t_{\text{eff}} \approx 3{,}0 \times 10^{-5}$ s. Jadi, migrasi yang berarti hanya terjadi selama kira-kira 3% dari seluruh waktu pendinginan. Pers. (20) memberikan $x = 0{,}0196$ nm,

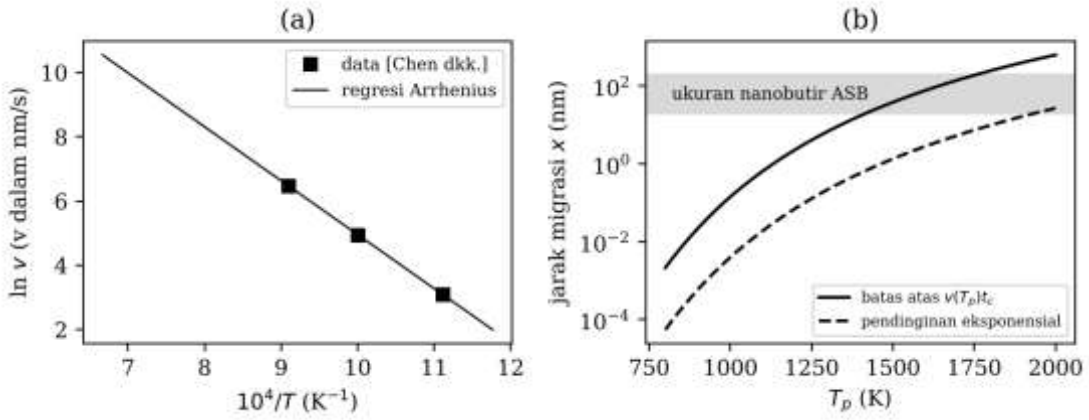
e-ISSN: 2964-0849
Vol.5 No.1 November 2026
DOI :https://doi.org/10.59585/bajik
Barongko
Jurnal Ilmu Kesehatan

sementara integrasi numerik memberikan 0,0191 nm, dengan galat 2,5%. Pada $T_p = 1.418$ K, kedua cara memberikan 0,710 nm dan 0,676 nm, dengan galat 5%.

Tabel 4. Suhu puncak terendah yang dibutuhkan agar migrasi batas butir menempuh jarak seukuran nanobutir dalam $t_c = 1$ ms

Skenario	$D = 20$ nm	$D = 200$ nm
Batas atas isotermal, $x = v(T_p)\,t_c$	1.419 K	1.762 K
Pendinginan eksponensial, $\tau = t_c$	1.734 K	—
Pendinginan eksponensial, $\tau = t_c/3$	1.938 K	—

Dalam rentang 900–1.100 K, batas butir hanya bergerak sejauh 0,02–0,65 nm selama 1 ms. Jarak ini sekitar dua hingga empat orde besaran lebih pendek daripada ukuran nanobutir dalam ASB, yaitu 20–200 nm (Gambar 3b). Bahkan pada skenario yang paling menguntungkan, yakni batas atas isotermal, butir 20 nm baru dapat terbentuk pada 1.419 K. Pada skenario pendinginan eksponensial yang lebih mendekati kenyataan, suhu yang diperlukan naik menjadi 1.938 K, sedikit melewati titik leleh Ti-6Al-4V (1.878 K). Untuk menempuh 20 nm pada 1.100 K, migrasi memerlukan waktu 31 ms. Waktu ini jauh lebih panjang daripada $t_c = 1$ ms, dan juga daripada waktu rotasi batas butir sekitar 0,5 ms untuk butir 200 nm yang dilaporkan Chen et al. (2024).



Gambar 3. (a) Plot Arrhenius untuk data laju migrasi batas butir dari Chen et al. (2024) beserta garis regresi Pers. (10). (b) Jarak migrasi selama pendinginan terhadap suhu puncak; pita abu-abu menandai kisaran ukuran nanobutir ASB.

2. Pembahasan

Jika dirangkai, ketiga hasil di atas membentuk satu alur argumen kuantitatif. Di skala makro, Proposisi 1 dan Akibat 1 memperlihatkan bahwa ketika kecepatan proyektil dekat dengan v_{bl}, hampir semua energi kinetiknya diserap target dalam bentuk deformasi plastis. Di skala meso, Teorema 1 menunjukkan bahwa deformasi tersebut kehilangan kestabilannya pada $\varepsilon_c \approx 0{,}4$–$2{,}0$, dengan suhu kritis $T_c \approx 410$–770 K pada ketiga material uji. Memang, suhu di dalam pita masih terus meningkat sesudah pelokalan terjadi. Akan tetapi, untuk mencapai 1.420–1.940 K (Tabel 4), kenaikan suhu harus lebih dari dua kali ΔT pada saat ketidakstabilan, sehingga mendekati titik leleh material. Di skala mikro, Proposisi 2 dan Tabel 4 menunjukkan bahwa pada kisaran suhu tersebut migrasi batas butir berjalan terlalu lambat.

Oleh karena itu, simpulan kualitatif Chen et al. (2024), bahwa rekristalisasi melalui migrasi saja tidak memadai untuk membentuk nanobutir di dalam ASB, kini ditopang oleh batas kuantitatif yang jelas.

e-ISSN: 2964-0849
Vol.5 No.1 November 2026
DOI :https://doi.org/10.59585/bajik

Barongko
Jurnal Ilmu Kesehatan

Mekanisme rotasi batas butir (Meyers, 1994), yang skala waktunya sekitar 0,5 ms, menjadi penjelasan yang selaras dengan hasil ini.

Keterbatasan. (i) Energi aktivasi dihitung dari tiga titik data yang berasal dari perhitungan teoretis, bukan dari pengukuran langsung, dan digunakan di luar rentang 900–1.100 K. (ii) Kriteria $d\sigma/d\varepsilon = 0$ tidak memperhitungkan konduksi panas maupun ketidakhomogenan awal, sehingga ε_c merupakan batas bawah. (iii) Nilai parameter Johnson–Cook dapat berbeda menurut sumber kalibrasinya. (iv) Data Recht–Ipson pada subbagian Hasil (a) adalah data sintetis yang hanya berfungsi untuk menguji metode penaksiran.

IV. KESIMPULAN

Makalah ini telah mengembangkan aspek matematis model-model ketahanan penetrasi logam yang dirangkum Chen et al. (2024) dan menautkannya antarskala. Pada skala makro, model Recht–Ipson terbukti naik tegas dan cekung, turunannya membesar tanpa batas di titik batas balistik, dan memiliki asimtot $v_r = av_i$; penaksir linier dengan $p = 2$ menghasilkan RMSE 35–51% lebih rendah daripada regresi nonlinier tiga parameter. Pada skala meso, perpaduan model Johnson–Cook dan pemanasan adiabatik pada $m = 1$ memiliki solusi analitik, dan kriteria $nB\varepsilon_c^{n-1} = k(A + B\varepsilon_c^n)^2$ mempunyai akar tunggal untuk $0 < n < 1$, tidak bergantung pada suhu awal, serta hanya menyimpang 3–5% dari solusi numerik dengan nilai m sebenarnya. Pada skala mikro, data laju migrasi batas butir memenuhi hukum Arrhenius dengan $Q = 139{,}5$ kJ/mol, dan pendekatan Laplace $x \approx v(T_p)\,\tau RT_p^2/\left[Q(T_p - T_0)\right]$ menghitung jarak migrasi dengan galat tidak lebih dari 5%. Nanobutir 20 nm baru dapat terbentuk lewat migrasi pada suhu puncak 1.420–1.940 K, jauh di atas suhu kritis ASB (410–770 K), sehingga rekristalisasi dinamis di dalam ASB lebih mungkin berlangsung melalui mekanisme rotasi. Penelitian selanjutnya disarankan menambahkan suku konduksi panas ke Pers. (8) untuk analisis stabilitas linier yang lengkap, serta mengkalibrasi model Recht–Ipson dengan data uji balistik dari eksperimen.

DAFTAR PUSTAKA

Bai, Y. and Dodd, B. (1992) *Adiabatic Shear Localization: Occurrence, Theories and Applications*. Oxford: Pergamon Press.

Chen, J., Li, S., Ma, S., Chen, Y., Liu, Y., Tian, Q., Zhong, X. and Song, J. (2024) 'The Anti-Penetration Performance and Mechanism of Metal Materials: A Review', *Engineering*, 40, pp. 131–157. doi: 10.1016/j.eng.2024.03.023.

Hines, J. A. and Vecchio, K. S. (1997) 'Recrystallization Kinetics within Adiabatic Shear Bands', *Acta Materialia*, 45(2), pp. 635–649.

Johnson, G. R. and Cook, W. H. (1983) 'A Constitutive Model and Data for Metals Subjected to Large Strains, High Strain Rates and High Temperatures', in *Proceedings of the 7th International Symposium on Ballistics*. The Hague, pp. 541–547.

Lesuer, D. R. (2000) *Experimental Investigations of Material Models for Ti-6Al-4V Titanium and 2024-T3 Aluminum*. Report DOT/FAA/AR-00/25. Washington, DC: U.S. Department of Transportation, Federal Aviation Administration.

Meyers, M. A. (1994) *Dynamic Behavior of Materials*. New York: John Wiley & Sons.

Recht, R. F. (1964) 'Catastrophic Thermoplastic Shear', *Journal of Applied Mechanics*, 31(2), pp. 189–193.

Recht, R. F. and Ipson, T. W. (1963) 'Ballistic Perforation Dynamics', *Journal of Applied Mechanics*, 30(3), pp. 384–390.

Taylor, G. I. and Quinney, H. (1934) 'The Latent Energy Remaining in a Metal after Cold Working', *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 143, pp. 307–326.

Zener, C. and Hollomon, J. H. (1944) 'Effect of Strain Rate upon Plastic Flow of Steel', *Journal of Applied Physics*, 15(1), pp. 22–32.